非負象限上で定義される単調劣同次写像に関連する最適化問題 (数理最適化の発展 : モデル化とアルゴリズム)

進藤, 晋

数理解析研究所講究録
第2069巻 2018年 141-144

非負象限上で定義される単調劣同次写像に関連する最適化問題

神奈川大学・工学部　進藤　晋
Susumu Shindoh
Faculty of Engineering, Kanagawa University

1　はじめに

1995 年に，Yates [9] は，電力制御マルチユーザワイヤレスシステムにおける干渉をモデル化するために，interference function の公理的フレームワークを提案した．さらに，Yates は，interference function に対する逐次アルゴリズムを考察し，不動点が存在する場合のその一意性と逐次アルゴリズムの不動点への収束性に関する結果を得た．

本研究の目的は，Yates の提案した interference function に対する固有値および固有ベクトルの存在を明らかにし，それを利用して，SIR (signal to interference ratio) 制約最適化問題の feasibility および最適解の性質を考察することである．

2　Standard Interference Function

n 次元実ユークリッド空間 R^n の部分集合 R^n_+ および R^n_{++} を，$R^n_+ = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i \geq 0, i = 1, \cdots, n\}$，$R^n_{++} = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x_i > 0, i = 1, \cdots, n\}$ で定義する．

$x, y \in R^n$ に対して，$x \leq y$ を $y - x \in R^n_+$，すなわち，すべての $i = 1, \cdots, n$ に対して，$x_i \leq y_i$ で定義する．このとき，$\leq$ は R^n 上の半順序となる．特に，$x \in R^n_+$ のとき，$x \geq 0$，$x \in R^n_{++}$ のとき，$x > 0$ と表記する．

$x, y \in R^n_+$，$f : R^n_+ \to R^n_+$ とする．$x \leq y$ ならば，$f(x) \leq f(y)$ を満たすとき，f は単調（monotone）であるという．$\alpha > 0, x \in R^n_+$ に対して，$f(\alpha x) = \alpha f(x)$ を満たすとき，f は同次（homogeneous）であるという．$\alpha > 1, x \in R^n_+$ に対して，$f(\alpha x) \leq \alpha f(x)$ を満たすとき，f は劣同次（subhomogeneous）であるという．また，$\alpha > 1, x \in R^n_+$ $(x \neq 0)$ に対して，$f(\alpha x) < \alpha f(x)$ を満たすとき，f は狭義劣同次（strictly subhomogeneous）であるという．

ここで，Yates が定義した standard interference function について述べる．

定義 1 *(Yates[9])* *次の公理を満たすとき，写像* $f : R^n_+ \to R^n_+$ *を standard interference function (以下 standard IF と略記) という：*

(1) (positivity) $f(x) > 0$ *for any* $x \in R^n_+$

(2) (monotonicity) $f(y) \geq f(x)$ *for any* $y \geq x \geq 0$

(3) (scalability) $\alpha f(x) > f(\alpha x)$ *for any* $x \in R^n_+$ *and* $\alpha > 1$

注 1）上の定義から，*standard IF* は単調狭義劣同次写像となる．
注 2) Yates の Axiom(1) は，Axiom(2)，(3) から導かれる．実際，Axiom(3) に $x = 0$ を代入し，$\alpha f(0) > f(0)$ を得る．$\alpha > 1$ から，$f(0) > 0$ となる．Axiom(2) から，$x \geq 0$ に対して，$f(x) \geq f(0) > 0$，すなわち，Axiom(1) を得る．
Yates は [9] において，初期点 $x_0 \in R^n_+$ に対する逐次アルゴリズム

$$x_{s+1} = f(x_s),\ s = 0, 1, \cdots \tag{1}$$

を考察して，以下の結果を得た．

定理 1 *standard IF* $f : R^n_+ \to R^n_+$ に対して，以下が成り立つ．

(1) 逐次アルゴリズム *(1)* が不動点 $x^* \in R^n_+$ $(f(x^*) = x^*)$ をもてば，x^* は f のただ一つの不動点である．

(2) x が *feasible,* すなわち，$x \geq f(x)$ ならば，x を初期点とする逐次アルゴリズム *(1)* により生成される点列は単調減少し，ただ一つの不動点 x^* に収束する．

(3) $f(x)$ が *feasible* ならば，x を初期点とする逐次アルゴリズム *(1)* はただ一つの不動点 x^* に収束する．

注 3) 定理 1 は，*standard IF* f の連続性を仮定している．このことは，Schubert and Boche[5] 等で指摘されている．この指摘に関連して，以下はよく知られている ([2])．

(1) *standard IF* f は R^n_{++} で連続である．

(2) f の R^n_{++} への制限 $f|R^n_{++}$ は，連続性，Axiom(2) および (3) を保持するように R^n_+ に拡張できる．すなわち，連続な *standard IF* $F : R^n_+ \to R^n_+$ が存在し，$F|R^n_{++} = f|R^n_{++}$.

本論文では，以降 *standard IF* f は，R^n_+ で連続であると仮定する．

3 SIR 制約最適化問題

$f : R^n_+ \to R^n_+$ を連続な *standard IF* とする．SIR (signal to interference ratio) は，ワイヤレスネットワークシステム等の分野でよく用いられる比率である．$i = 1, 2, \cdots, n$ に対する SIR は

$$\mathrm{SIR}_i(x) = \frac{x_i}{f_i(x)} \tag{2}$$

で定義される．ここで，f_i は写像 f の第 i 成分を表す．
ある閾値ベクトル $\gamma = (\gamma_1, \cdots, \gamma_n) \in R^n_{++}$ に対して，以下の最適化問題を考察する：
最適化問題 SIR（SIR 制約最適化問題）

$$\begin{cases} min & \|x\| \\ s.t. & x \in R^n_+ \\ & \mathrm{SIR}_i(x) \geq \gamma_i,\ i = 1, \cdots n \end{cases}$$

ここで，$\|x\|$ は x の l_1 ノルム，$\|x\| = \sum_{i=1}^n |x_i|$ を表す．特に，$x \geq 0$ ならば，$\|x\| = \sum_{i=1}^n x_i$ である．定義から，l_1 ノルムは単調 (monotone)，すなわち，$0 \leq x \leq y$ ならば $\|x\| \leq \|y\|$ である．さらに，$0 \leq x \leq y$ かつ $x \neq y$ ならば $\|x\| < \|y\|$ となる．最適化問題 SIR は，SIR の下限を定めて，総出力を最小化する問題である．

写像$\gamma\cdot f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$を，$x\in R_{+}^{n}$に対して$\gamma\cdot f(x)=(\gamma_1 f_1(x),\cdots,\gamma_n f_n(x))$で定義すると，最適化問題1は以下の問題に変形できる：

最適化問題 SIR（変形版）

$$\begin{cases} min & \|x\| \\ s.t. & x\in R_{+}^{n} \\ & \gamma\cdot f(x)\le x \end{cases}$$

次の補題は，定義1から明らかである．

補題 1 $f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$を*standard IF*とする．このとき，任意の$\gamma\in R_{++}^{n}$に対して，$\gamma\cdot f$は*standard IF*である．

以下で，最適化問題SIRのfeasibility，最適解の存在と性質を明らかにする．そのために，*standard IF*に対する固有値および固有ベクトルの定義を与える．

定義 2 写像$f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$を連続な*standard IF*とする．$x\in R_{+}^{n}$ $(x\neq 0)$および実数$\lambda\ge 0$が存在して，$f(x)=\lambda x$を満たすとき，λをfの固有値，xをλに対する固有ベクトルとよぶ．

注 4) 定義1のAxiom(1)により，任意の$x\in R_{+}^{n}$ $(x\neq 0)$に対して，$f(x)>0$．したがって，固有値λが存在するならば，$\lambda>0$であり，その固有ベクトルxは$x>0$となる．

4 結果

結果を，以下にまとめる．まず，固有値，固有ベクトルに関する結果から述べる．

定理 2 $f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$を連続な*standard IF*とする．任意の実数$t>0$に対して，$\Sigma_t=\{x\in R_{+}^{n}:\|x\|=t\}$とする．このとき，以下が成立する：

(1) Σ_t上で，fの固有値$\lambda_f(t)$および固有ベクトル$x^*>0$がただ一つ存在する．

(2) $\lambda_f(t)$はtの狭義単調減少関数，したがって，tの連続関数となる．

(3) $\lim_{t\downarrow 0}\lambda_f(t)=+\infty$.

証明は[3, 4, 6]を参照．Shindoh[6]は，*standard IF*に特化した証明を与えている．定理2(1)は，Blondel et al.[1]が考察した非負象限上での条件つきアフィン固有値問題と密接に関連している(Shindoh[7])．

次に，最適化問題SIRに対する結果を述べる．

定理 3 $f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$を連続な*standard IF*とする．このとき，$\gamma\in R_{++}^{n}$に対して，以下が成立する：

(1) ある実数$t>0$に対して，写像$\gamma\cdot f: R_{+}^{n}\to R_{+}^{n}$の固有値$\lambda_{\gamma\cdot f}(t)$が不等式$\lambda_{\gamma\cdot f}(t)\le 1$を満たすならば，最適化問題*SIR*は実行可能解をもつ，すなわち，

$$\{x\in R_{+}^{n}:\mathrm{SIR}_i(x)\ge\gamma_i\ (i=1,\cdots,n)\}\neq\emptyset.$$

特に，

$$\{x\in R_{++}^{n}:\mathrm{SIR}_i(x)\ge\gamma_i\ (i=1,\cdots,n)\}\neq\emptyset.$$

(2) $\{x \in R^n_+ : \mathrm{SIR}_i(x) \geq \gamma_i \ (i = 1, \cdots, n)\} \neq \emptyset$ ならば，最適化問題 *SIR* はただ一つの最適解 $x^* > 0$ をもち，最小値は $t^* = \|x^*\|$ となる．さらに，$x = x^*$ で，*SIR* 制約はすべて等式となる：

$$\mathrm{SIR}_i(x^*) = \gamma_i \ (i = 1, \cdots, n),$$

すなわち，

$$\lambda_{\gamma\, f}(t^*) = 1 = \frac{\gamma_1 f_1(x^*)}{x_1^*} = \cdots = \frac{\gamma_n f_n(x^*)}{x_n^*}.$$

証明は，Shindoh[6] を参照．定理 3(2) は，Vucic and Schubert[8] の単調同次写像に関する結果が *standard IF* の場合にも成立していることを示している．

5 今後の課題

最適化問題 SIR の制約を満たす閾値ベクトル $\gamma \in R^n_{++}$ の集合，すなわち，$\{x \in R^n_+ : \mathrm{SIR}_i(x^*) \geq \gamma_i \ (i = 1, \cdots, n)\} \neq \emptyset$ となるような $\gamma \in R^n_{++}$ の集合の構造を明らかにする．

参考文献

[1] Blondel, V.D., L. Ninove and P. Van Dooren : An affine eigenvalue problem on the nonnegative orthant, Linear Algebra and its Applications, 404, pp.69 - 84, (2005).

[2] Burbanks A. D., R. Nussbaum and C. Sparrow : Extension of order-preserving maps on a cone, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser. A 133A, pp.35 - 59, (2003).

[3] Ogiwara, T. : Nonlinear Perron Frobenius problem on an ordered Banach space, Japan J. Math. Vol. 21, No. 1, pp.43 - 103, (1995).

[4] Oshime, Y. : Perron-Frobenius Problem for weakly sublinear maps in a Euclidean positive orthant, Japan J. Indust. Appl. Math., 9, pp.313 - 350, (1992).

[5] Schubert, M. and H. Boche : *Interference Calculus*, Springer (2012).

[6] Shindoh, S. : Some properties of standard interference mappings, In preparation.

[7] Shindoh, S. : A note on conditional affine eigenvalue problems, In preparation.

[8] Vucic, N. and M. Schubert : Fixed point iteration for max-min sir balancing with general interference functions, ICASSP 2011, pp.3456 - 3459, (2011).

[9] Yates, R. D. : A framework for uplink power control in cellular radio systems, IEEE J. Select. Areas Commun. , Vol. 13, No. 7, pp.1341 - 1348, (1995).